

Hessisches Kultusministerium

HESSEN



Landesabitur 2007

Bildungsland
Hessen



Beispielaufgaben 2005



Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 8

Auswahlverfahren: siehe Hinweise

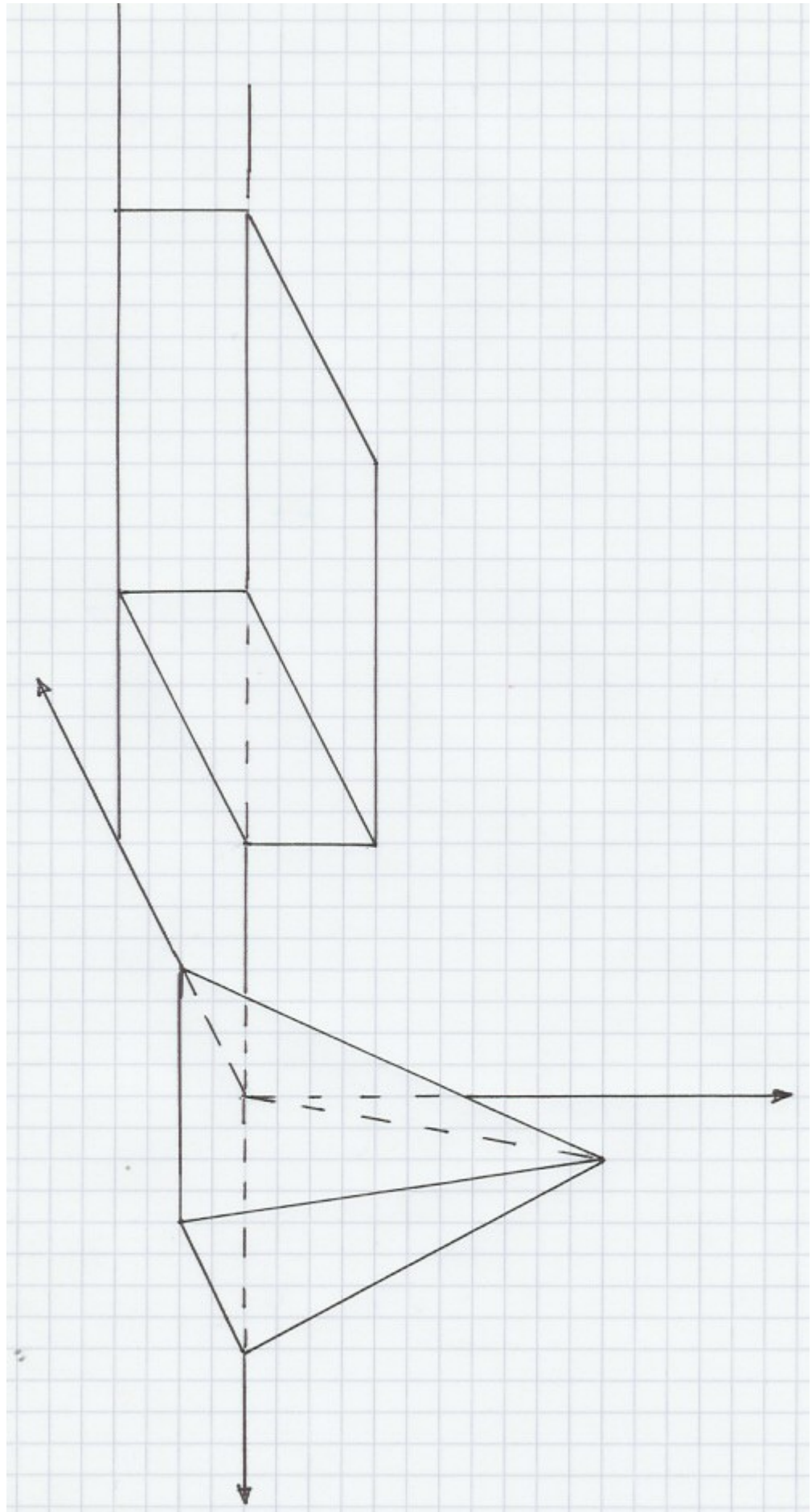
Einlese- und Auswahlzeit: 30 Minuten

Bearbeitungszeit: 240 Minuten (für die Gesamtprüfung)

Erlaubte Hilfsmittel:	Übliche Formelsammlung Taschenrechner oder CAS
Sonstige Hinweise:	keine

- b. Die Punkte $\begin{pmatrix} 5.2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4.4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen auf dem Schattenrand. Zeichnen Sie den Schatten der Pyramide, nachdem Sie die noch fehlenden Punkte berechnet haben. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.
- c. Beschreiben Sie, wie man den Winkel berechnen kann, unter dem die Sonnenstrahlen auf eine Pyramidenfläche auftreffen. Bestimmen Sie diesen Winkel für eine der beiden Pyramidenflächen, die in der Sonne liegen.
- d. In die Pyramide wird eine möglichst große Halbkugel einbeschrieben. Deren flache Seite liegt in der x_1 - x_2 -Ebene. Berechnen Sie den Radius der Kugel, geben Sie die Koordinaten eines Berührungspunktes an und erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

Material



Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

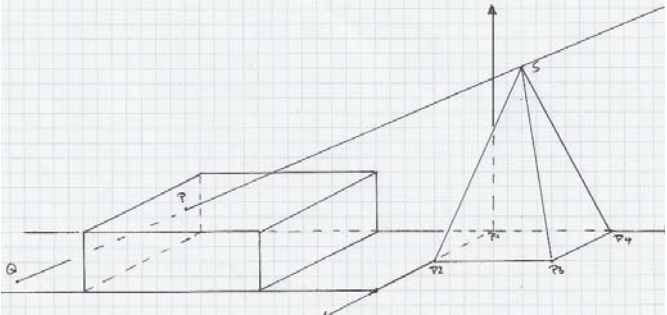
Zielsetzung

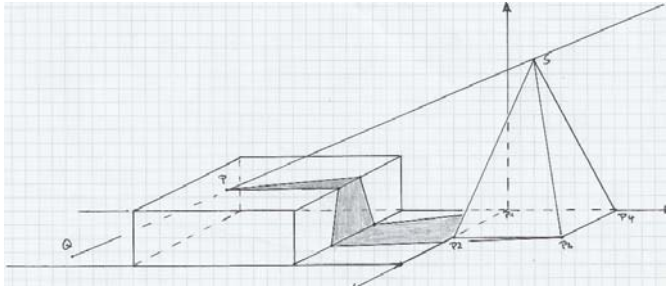
Die Aufgabe orientiert sich an den Leitideen Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren und Modellieren. Die Aufgabe überprüft die Fähigkeit, sich in ein räumliches Problem hinein zu denken und dieses zu strukturieren. Bei der Lösung des Problems ist ein ständiger Wechsel zwischen den Darstellungsebenen (grafisch und symbolisch) erforderlich, was ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen voraussetzt. Es wird die Darstellung der Situation auf einem Blatt eingefordert. Diese verlangt konzentriertes Arbeiten und präzise Zeichnungen.

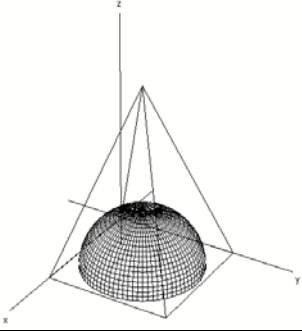
Bezug zum Lehrplan

Die üblichen Verfahren zur Untersuchung von Geraden und Ebenen (Punkt-Richtungsform und Koordinatengleichung), der Normalenvektor, das Skalarprodukt und die Berechnung von Längen und Winkeln (12 II) werden benötigt. Die offene Aufgabenstellung an einem realen Objekt ermöglicht unterschiedliche Lösungswege, die aber zum gleichen Ergebnis führen. Im letzten Teil wird die Lagebeziehung zwischen Kugel und Ebene untersucht (12II**).

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bezug zum Lehrplan
a.	<p>Zunächst müssen die Daten (Koordinaten der Pyramidenpunkte und Abmessungen der Stufe) der Zeichnung entnommen und die entsprechenden Punkte definiert werden.</p> <p>Die Gleichung der Gerade durch die Spitze wird ermittelt und nachgeprüft, dass die Punkte P und Q auf der Geraden liegen.</p>  <p>Mit dem Lineal lässt sich begründen, dass die Dreiecke P3P4S und P1P4S in der Sonne liegen.</p>	2	4	0	<p>Vektoren</p> <p>Parameterdarstellung einer Geraden</p> <p>Lagebeziehung von Punkt und Gerade</p>
b.	<p>Um den Schatten zeichnen zu können, müssen die Schnittpunkte mit den Kanten berechnet werden.</p> <p>Dazu wird die Ebene, die durch den Sonnenstrahl SP und die Pyramidenkante SP3 gebildet wird betrachtet und ihre Gleichung in Punkt-Richtungsform bestimmt.</p> <p>Die Stufenkanten werden durch einfache Gleichungen (z. B. $x_2 = -4$ und $x_3 = 2$) beschrieben.</p>				<p>Parameterdarstellung einer Ebene</p> <p>Lagebeziehung von Geraden und einer Ebene</p>

	<p>Die Schnittpunkte der Stufenkanten mit der Ebene werden berechnet und gezeichnet.</p> <p>Die übrigen Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ werden als</p> <p>Schnittpunkte der Stufenkanten mit der durch SP und der Pyramidenkante SP1 aufgespannten Ebene berechnet und eingezeichnet.</p> 	4	6	0	<p>Parameterdarstellung einer Ebene</p> <p>Lagebeziehung von Geraden und einer Ebene</p>
c.	<p>Die Schüler müssen erkennen, dass z. B. die Fläche P3P4S „in der Sonne liegt“. Sie beschreiben das Verfahren der Winkelberechnung. Um den Winkel zu berechnen, wird zunächst ein Normalenvektor der Ebene bestimmt, der „nach innen“ gerichtet ist. Mit diesem Vektor und dem Richtungsvektor v der Sonnenstrahlen wird der eingeschlossene Winkel berechnet (15.9°). Der gesuchte Winkel ist dann 74.1°</p> $n := [0, -3, -1]$ $\frac{n \cdot v}{ n \cdot v } = \frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25}$ $\alpha := \text{ACOS}\left(\frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25}\right)$	0	4	2	<p>Skalarprodukt</p> <p>Orthogonalität von Vektoren</p> <p>Winkel zwischen zwei Vektoren</p> <p>Interpretation der Lösung</p>
d.	<p>Die Sch. erkennen, dass der Mittelpunkt der Kugel im Punkt $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt und dass die Gerade durch diesen Punkt und den Berührungspunkt senkrecht auf der Fläche steht. Mit der Geraden durch M und Richtungsvektor n wird der Schnittpunkt T1 mit der Pyramidenfläche berechnet.</p> $T1 := \left[2, \frac{19}{5}, \frac{3}{5} \right]$ <p>Der Abstand von T1 und M liefert den gesuchten Radius.</p>				<p>Lagebeziehung zwischen Kugel und Ebene</p> <p>Abstandsberechnung</p>

		1	4	3	
	Σ 30	7	18	5	